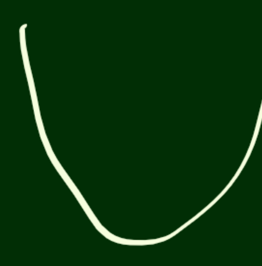
Newtonova metoda: $f \sim p$ kvadrat. polynom. $x_{n+1} = \operatorname{argmin} p$

- $p(x) = f(x_n) + \nabla f(x_n)\cdot(x - x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^T \underbrace{\nabla^2 f(x_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}}(x - x_n)$ = Taylor 2. řádu v x_n

  $p(x_n) = f(x_n)$, $\nabla p(x_n) = \nabla f(x_n)$, $\nabla^2 p(x_n) = \nabla^2 f(x_n)$

- $\nabla p(x) = \nabla f(x_n) + \nabla^2 f(x_n)(x - x_n) = 0 \implies$

$$\implies x = \underbrace{x_n - \underbrace{(\nabla^2 f(x_n))^{-1}}_{\text{matice}} \underbrace{\nabla f(x_n)}_{\text{vektor}}}_{} =: x_{n+1} \quad \text{Newton.}$$

- To samé jako Newton pro hledání kořene $\nabla f(x_*) = 0$
-  p konvexní $\exists \operatorname{argmin} p \iff \nabla^2 f(x_n)$ poz. def.  $f''(x_n) > 0$
- Pokud f kvadratická fce $\implies$ Newton dá $\bar{x}$ = přesné řešení v 1. iteraci pro lib. x_0

Srovnejte s cik-cak efektem.

Obecný algoritmus:

Lemma: Nechť $\exists \nabla f(x) \neq 0$. Nechť $\mathbb{B}$ je poz. def. matice, pak $-\mathbb{B}\nabla f(x)$ je spádový směr v bodě x.

Dk: $\nabla f(x)\cdot(-\mathbb{B}\nabla f(x)) = -\underbrace{\nabla f(x)^T \mathbb{B} \nabla f(x)}_{>0} < 0$, tj. $-\mathbb{B}\nabla f(x)$ je spádový směr.

Důsledek: Newton: $-\underbrace{(\nabla^2 f(x_n))^{-1}}_{\mathbb{B}} \nabla f(x_n)$ je spádový směr, pokud $\nabla^2 f(x_n)$ poz. def.

Dk: A^{-1} poz. def $\iff A$ poz. def.

Obecný algoritmus: $x_{n+1} = x_n - \alpha_n M_n \nabla f(x_n)$, M_n poz. def.

α_n určím pomocí line search.

M_n:
- $\mathbb{I}$ ... m. největšího spádu
- $(\nabla^2 f(x_n))^{-1}$ ... Newton + line search.
- $(\operatorname{diag} \nabla^2 f(x_n))^{-1}$ – diagonální aprox. Newtonovy metody
- $(\beta_n \mathbb{I} + \nabla^2 f(x_n))^{-1}$ – kompromis mezi největším spádem ($\beta_n \to \infty$) a Newtonem ($\beta_n = 0$)

užitečné, pokud $\nabla^2 f(x_n)$ není poz. def. $\implies \beta_n$ dost. velké $\implies \beta_n \mathbb{I} + \nabla^2 f(x_n)$ poz. def.

Levenberg – Marquardtova metoda.

Ortogonální polynomy:

Def: Daná váhová funkce $w : (a,b) \to \mathbb{R}$, $w > 0$ na (a,b), spoj.
Pro $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ def skalární součin $(f,g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx$.

Pozn: $w \in L^\infty(a,b)$, $f,g \in L^2(a,b)$. $\quad (f,f) = \int_a^b w f^2 dx \geq 0$
$= 0 \iff f \equiv 0$

Def: Posloupnost ortogonálních polynomů $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$: $\varphi_n \in P_n(a,b)$ - polynom st. $\leq n$
$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

Konstrukce: Gram-Schmidt na $\{c_n x^n\}_{n=0}^\infty$, c_n konst, lib.

- $\varphi_0 = c_0$
- Nechť znám $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, chci $\varphi_{n+1}(x) = c_{n+1} x^{n+1} + a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n$

$(\cdot, \varphi_j)$, $j = 0, \dots, n$: $0 = (\varphi_{n+1}, \varphi_j) = c_{n+1}(x^{n+1}, \varphi_j(x)) + a_j (\varphi_j, \varphi_j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_j = -\frac{c_{n+1}(x^{n+1}, \varphi_j(x))}{(\varphi_j, \varphi_j)} = -\frac{c_{n+1}\int_a^b w(x) x^{n+1} \varphi_j(x) dx}{\int_a^b w(x) \varphi_j(x) \varphi_j(x) dx}$$

$\Rightarrow \varphi_{n+1} \perp \varphi_j \quad \forall j = 0, \dots, n$.

Pozn:
- Ortonormální ($c_{n+1} = \dots$) ✗
- c_n volím tak, aby koef. u x^n v $\varphi_n(x)$ byl 1 (monické polynomy).
- $\varphi_{n+1} \perp P_n$, tj. $(\varphi_{n+1}, p) = 0 \quad \forall p \in P_n$.
- $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ je OG báze P_n.

Věta: (3-členná rekurence): $\exists A_n, B_n \in \mathbb{R}$: $\varphi_{n+1}(x) = (x + A_n)\varphi_n(x) + B_n \varphi_{n-1}(x)$.

Dk: $x\varphi_n(x) \in P_{n+1} \Rightarrow x\varphi_n(x) = \underbrace{\alpha_{n+1}}_{=1 \text{ (aby monické)}} \varphi_{n+1}(x) + \alpha_n \varphi_n + \dots \alpha_0 \varphi_0$

$(\cdot, \varphi_k)$, $k < n-1$:

Levá strana: $(x\varphi_n(x), \varphi_k(x)) = \int_a^b w\, x \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b w(x) \varphi_n(x) \underbrace{x\varphi_k(x)}_{\text{st.} < n} dx$
$= 0$, $\varphi_n \perp P_{n-1}$

Pravá strana: zbyde jen $\alpha_k (\varphi_k, \varphi_k)$

$\Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall k < n-1$.

$\Rightarrow \boxed{x\varphi_n(x) = \varphi_{n+1} + \alpha_n \varphi_n + \alpha_{n-1} \varphi_{n-1}}$ přeuspořádám.

Legenderovy polynomy: $(a,b)=(-1,1)$, $w(x)=1$, $(f,g)=\int_{-1}^{1} fg\,dx$

Vyjde $1, x, \frac{1}{2}(3x^2-1), \dots$

rekurence: $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

$-\ \{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ – OG polyn, ale ne nutně monické.

Čebyševovy polynomy: Na $(-1,1)$, $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Def: $T_n(x)$ = OG polynomy vzhledem k w, $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$

Př: $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $n=2$: $\cos(2\underbrace{\theta}_{\arccos x}) = 2\cos^2(\theta)-1 = \underline{2x^2-1} = \underline{T_2(x)}$

• Monické polynomy: $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$

• kořeny T_n jsou $\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k=1,\dots,n$.

• Rekurence: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

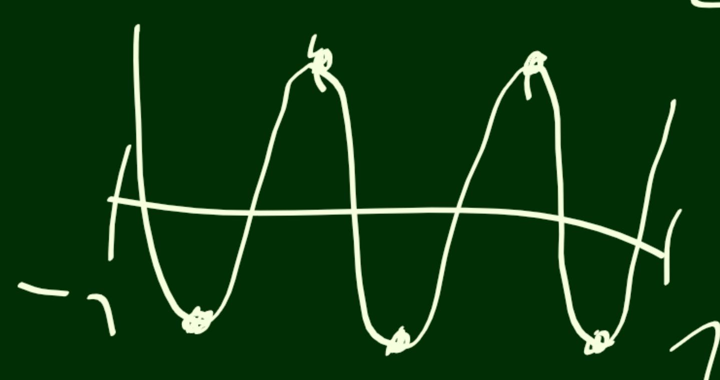
• OG: $(T_n,T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\cos\theta \\ dx=-\sin\theta\, d\theta \\ (-1,1)\to(\pi,0)\end{array}\right| =$

$= +\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\cancel{\sin\theta}}\cancel{\sin\theta}\, d\theta = 0$ pro $n\neq m$.

Věta: Nechť p_n je monický polynom st. n. Pak $\max_{x\in[-1,1]}|p_n(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]}|\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Dk: 1) $|\tilde{T}_n|$ nabývá maxim v bodech $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k=0,\dots,n$

Platí: $\tilde{T}_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$



střídání znamének

2) Sporem: Nechť $\exists p_n: \max_{[-1,1]}|p_n| < \frac{1}{2^{n-1}}$

def $r = \tilde{T}_n - p_n$

Pak $r(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - \underbrace{p_n(x_k)}_{|\cdot| < \frac{1}{2^{n-1}}} \Rightarrow r(x_k) \begin{cases} >0 & \text{pro } k \text{ sudé} \\ <0 & \text{pro } k \text{ liché.}\end{cases}$

• Tj. $\forall k=0,\dots,n$ $\exists$ kořen polynomu $r \in (x_k, x_{k+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>r má aspoň n kořenů.</u>

• Ale stupeň $r = n-1$ (odečítám dva monické polynomy)

$\Rightarrow r\equiv 0 \Rightarrow \tilde{T}_n \equiv p_n$ Spor s tím, že $\max|p_n| < \max|\tilde{T}_n|$.

Věta: $\{\varphi_n\}$ lib. OG systém $\Rightarrow$ φ_n má n různých kořenů v (a,b).